Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 20 заданий. Часть 1 содержит 13 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–13 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8 . 10 −0,8 Бланк

При выполнении заданий 14–20 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

При выполнении работы разрешается использовать линейку.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

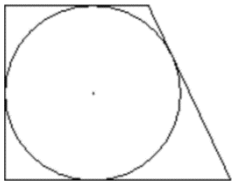
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Составитель: Школа Пифагора

Часть 1

Ответом к заданиям* 1–13 *является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 40, её большая боковая сторона равна 11. Найдите радиус окружности.

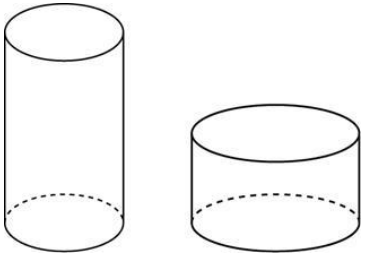


Ответ: _____.

2 Даны векторы $\vec{a}\ (3;4)$ и $\vec{b}\ (-4;-3)$. Найдите косинус угла между ними.

Ответ: _____.

3 Дано два цилиндра. Объём первого цилиндра равен 12. У второго цилиндра высота в три раза больше, а радиус основания в два раза меньше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра.



Ответ: _____.

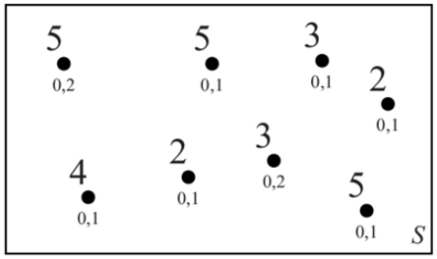
4 На чемпионате по прыжкам в воду выступают 25 спортсменов, среди них 4 прыгуна из Италии и 6 прыгунов из Мексики. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что двадцать четвёртым будет выступать прыгун из Италии.

Ответ: _____.

5 Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит её. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,5 при каждом отдельном выстреле. Какое наименьшее количество патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не меньше 0,7?

Ответ: _____.

6 На диаграмме Эйлера схематически показан случайный опыт S, с которым связана случайная величина X. Около каждого элементарного события указана вероятность этого события и соответствующее значение случайной величины X.



Найдите вероятность события $(X = 5)$.

Ответ: _____.

7 Найдите корень уравнения

$$\frac{1}{3x-1} = 5.$$

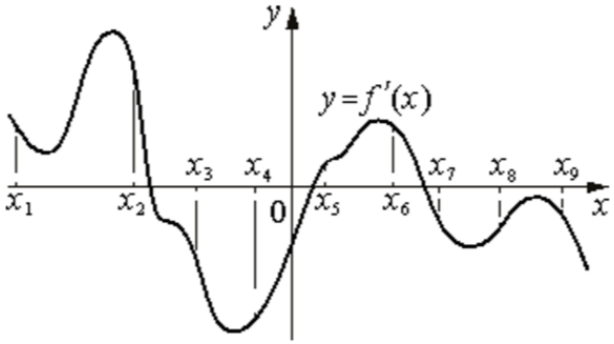
Ответ: _____.

8 Найдите значение выражения

$\log_2 240 - \log_2 3{,}75$.

Ответ: _____.

9 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены девять точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$. Сколько из этих точек лежит на промежутках убывания функции $f(x)$?



Ответ: _____.

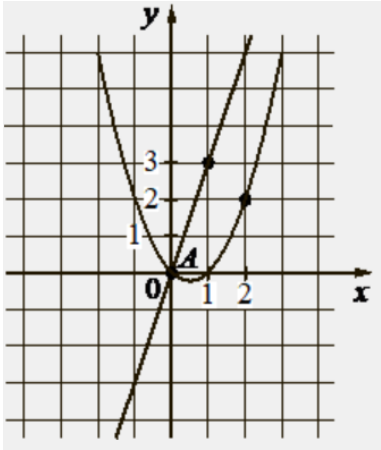
10 Два тела, массой $m = 2$ кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $v = 8$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в Дж), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, вычисляется по формуле $Q = mv^2\sin^2\alpha$, где m — масса (в кг), v — скорость (в м/с). Найдите, под каким углом 2α должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилась энергия, равная 32 Дж. Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____.

11 Два велосипедиста одновременно отправились в 160-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 6 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 6 часов раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

12 На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = kx$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Ответ: _____.

13 15-го декабря планируется взять кредит в банке на сумму 900 тысяч рублей на 11 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца с 1-го по 10-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– 15-го числа 10-го месяца долг составит 200 тысяч рублей;
– к 15-му числу 11-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1021 тысячу рублей.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 14–20 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (14, 15 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

14 а) Решите уравнение

$$4\cos^3 x + 3\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.

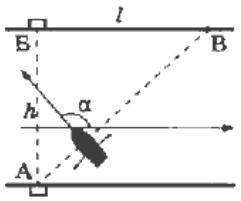
15 На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 1 : 2$, на ребре BB_1 – точка F так, что $B_1F : FB = 1 : 5$, а точка T – середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 2$, $AD = 6$, $AA_1 = 6$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.
б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью AA_1B_1.

16 Решите неравенство

$$\frac{8^{x+1} - 40}{2 \cdot 64^x - 32} \leq 1.$$

17 На противоположных берегах прямого участка реки друг напротив друга на расстоянии h расположены пристани А и Б (см. рисунок). Путник переправляется на лодке от пристани А на противоположный берег. Зная, что собственная скорость лодки v меньше скорости течения реки u (лодку будет сносить течением), путник направляет лодку под углом α к направлению течения.



В итоге лодку сносит течением, и путник прибывает к противоположному берегу реки в точку В, находящуюся от пристани Б на расстоянии l, которое выражается формулой

$$l = h \cdot \frac{u + v\cos\alpha}{v\sin\alpha}.$$

Найдите наименьшее возможное расстояние l, если $h = 60$ м, $u = 1{,}3$ м/с и $v = 1{,}2$ м/с.

18 Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Диагонали AD и BE пересекаются в точке M. Известно, что $BCDM$ — параллелограмм.

а) Докажите, что две стороны пятиугольника равны.
б) Найдите AB, если известно, что $BE = 12$, $BC = 5$, $AD = 9$.

19 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (xy - 2x + 12)\cdot\sqrt{y - 2x + 12} = 0, \\ y = ax - 10 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

20 Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 10 раз больше, либо в 10 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3024.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?
б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?
в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

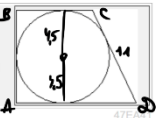
Составитель варианта — Евгений Пифагор	
Результаты:	Результаты моих учеников: • 53 человека набрали 100 баллов • 789 человек набрали 90+ баллов Личные результаты: • Набрал 100 баллов на ЕГЭ по математике профиль • Высшее образование — ТГУ (Тольятти), 2009-2014 • Занял 1 место в трёх олимпиадах по высшей математике, 2009-2011 • 15 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
ВК:	https://vk.ru/shkolapifagora
Ютуб:	https://www.youtube.com/c/pifagor1

Ответы

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	4,5	
2	-0,96	
3	9	
4	0,16	
5	2	
6	0,4	
7	0,4	
8	6	
9	5	
10	60	
11	10	
12	4	
13	2	
14	а) $\frac{\pi}{2}+\pi n, \pm\frac{\pi}{6}+\pi n; n \in Z$ б) $-\frac{11\pi}{6}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{7\pi}{6}$	
15	$arctg\left(1{,}5\sqrt{5}\right)$	
16	$\left\{\frac{1}{3}\right\} \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$	
17	25	
18	10	
19	$(-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{5}{3}\right] \cup \{2\} \cup \{3\}$	
20	а) нет б) да в) 549	

Решения

1 Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 40, её большая боковая сторона равна 11. Найдите радиус окружности.



ИСТОЧНИКИ
ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Основная волна 2026
Основная волна (Резерв) 2025
Основная волна (Резерв) 2023
Досрочная волна 2015

① $P = 40 = (AB + CD) + (AD + BC)$, $AB = 11$, $CD = 11$, $AD = 20$, $BC = 20$

② $AB = 20 - 11 = 9 = 2R$

③ $R = \frac{9}{2} = 4{,}5$

ОТВЕТ 4,5

2 Даны векторы $\vec{a}\ (3; 4)$ и $\vec{b}\ (-4; -3)$. Найдите косинус угла между ними.

ИСТОЧНИКИ
Основная волна (Резерв) 2024
СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ
$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$
где φ – угол между векторами
СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ В КООРДИНАТАХ
Если $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2)$, то
$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$
ДЛИНА ВЕКТОРА
Если $\vec{a}(x; y)$, то
$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

① $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot (-4) + 4 \cdot (-3) = -24$

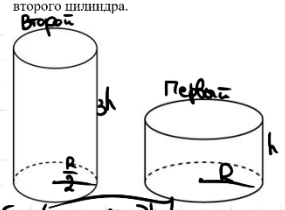
② $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
$|\vec{b}| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$

③ $-24 = 5 \cdot 5 \cdot \cos\varphi$
$\cos\varphi = \frac{-24}{25} = -0{,}96$

ОТВЕТ −0,96

3 Дано два цилиндра. Объём первого цилиндра равен 12. У второго цилиндра высота в три раза больше, а радиус основания в два раза меньше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра.

ИСТОЧНИКИ
ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Основная волна 2022
Основная волна 2019
Основная волна 2017



① $V_1 = 12 = \pi R^2 h$

② $V_2 = \pi \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot 3h = \frac{3}{4}\pi R^2 h = \frac{3}{4} \cdot 12 = 9$

ОТВЕТ 9

Составитель: Школа Пифагора

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 7

4 На чемпионате по прыжкам в воду выступают 25 спортсменов, среди них 4 прыгуна из Италии и 6 прыгунов из Мексики. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что двадцать четвёртым будет выступать прыгун из Италии.

266249

ИСТОЧНИКИ
ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Основная волна 2026
Основная волна 2025
Основная волна 2023
Основная волна 2022
Досрочная волна 2022
Основная волна 2017
Основная волна 2013

$P = \frac{4}{25} = 0{,}16$

ОТВЕТ 0,16

5 Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит её. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,5 при каждом отдельном выстреле. Какое наименьшее количество патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не меньше 0,7?

30D3F2

ИСТОЧНИКИ
ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Основная волна (Резерв) 2023
Основная волна (Резерв) 2022

① $P(\text{попасть}) = 0{,}5$
$P(\text{промахн.}) = 0{,}5$ } 1

② $P(\text{поражения цели}) \geq 0{,}7$
$P(\text{цель}) \leq 0{,}30$

② 1 выстрел $P(\text{цель}) = 0{,}5$
2 выстрела $P(\text{цель}) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$ ✓

ОТВЕТ 2

6 На диаграмме Эйлера схематически показан случайный опыт S, с которым связана случайная величина X. Около каждого элементарного события указана вероятность этого события и соответствующее значение случайной величины X.



Найдите вероятность события $(X = 5)$.

$P(X=5) = 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}4$

ОТВЕТ 0,4

7 Найдите корень уравнения $\frac{1}{3x-1} = \frac{5}{4}$

29F491

ИСТОЧНИКИ
ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Основная волна (Резерв) 2024
Досрочная волна (Резерв) 2023
Основная волна (Резерв) 2022
Досрочная волна 2013

$\frac{1}{3x-1} - \frac{5}{1} = 0 \quad | \cdot (3x-1)$

$\frac{1-15x+5}{3x-1} = 0$

$6 - 15x = 0$

$15x = 6$

$x = \frac{6}{15} = 0{,}4$

ОТВЕТ 0,4

8 Найдите значение выражения $\log_2 240 - \log_2 3{,}75$.

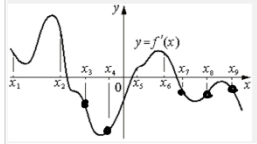
F6A353

ИСТОЧНИКИ
ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Основная волна 2025
Досрочная волна 2024
Основная волна 2023
Основная волна 2019
Основная волна 2013

$\log_2 \frac{240}{3{,}75} = \log_2 64 = 6$

ОТВЕТ 6

9 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены девять точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$. Сколько из этих точек лежит на промежутках убывания функции $f(x)$?



8FD3A4

ИСТОЧНИКИ
ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Основная волна 2026
Досрочная волна 2025
Досрочная волна (Резерв) 2024
Основная волна 2023
Основная волна (Резерв) 2022
Досрочная волна 2016

ОТВЕТ 5

10

Два тела, массой $m = 2$ кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $v = 8$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в Дж), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, вычисляется по формуле $Q = mv^2 \sin^2 \alpha$, где m — масса (в кг), v — скорость (в м/с). Найдите, под каким углом 2α должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилась энергия, равная 32 Дж. Ответ дайте в градусах.

ИСТОЧНИКИ
ГИА (старый банк)
ГИА (новый банк)
Досрочная волна 2020

D33D49



$32 = 2 \cdot 8^2 \cdot \sin^2 \alpha$

$\sin^2 \alpha = \frac{32}{2 \cdot 64} = \frac{1}{4}$

$\sin \alpha = \pm \frac{1}{2}$

$\alpha = 30°$

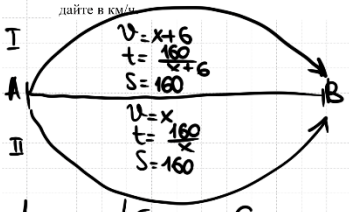
$2\alpha = 60$

ОТВЕТ 60

11

Два велосипедиста одновременно отправились в 160-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 6 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 6 часов раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

ИСТОЧНИКИ
ГИА (старый банк)
ГИА (новый банк)
Основная волна 2026
Основная волна 2023
Основная волна 2018



I: $v = x + 6$, $t = \frac{160}{x+6}$, $S = 160$

II: $v = x$, $t = \frac{160}{x}$, $S = 160$

$t_{\text{II}} - t_{\text{I}} = 6$

$\frac{160}{x} - \frac{160}{x+6} = 6$

$\frac{160x + 160 \cdot 6 - 160x}{x^2 + 6x} = \frac{6}{1} \quad | \cdot 6$

$x^2 + 6x = 160$

$x^2 + 6x - 160 = 0$

$x = 10$ $\quad x = -16$

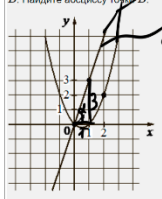
ОТВЕТ 10

12

На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = kx$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.

ИСТОЧНИКИ
ГИА (старый банк)
ГИА (новый банк)
Демо 2026
Основная волна 2025
Демо 2025
Основная волна 2023

3D9010



$y = 3x$

① $a = 1$

$c = 0$

$x_0 = \frac{-b}{2a} = 0{,}5$

$\frac{-b}{2 \cdot 1} = 0{,}5$

$b = -1$

$f(x) = 1 \cdot x^2 - 1x + 0$

② $x^2 - x = 3x$

$x^2 - 4x = 0$

$x \cdot (x - 4) = 0$

$x = 0$ (A) $\quad x = 4$ (B)

ОТВЕТ 4

13

15-го декабря планируется взять кредит в банке на сумму 900 тысяч рублей на 11 месяцев. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца с 1-го по 10-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
– 15-го числа 10-го месяца долг составит 200 тысяч рублей;
– к 15-му числу 11-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1021 тысячу рублей.

ИСТОЧНИКИ
ГИА (старый банк)
ГИА (новый банк)
Досрочная волна 2022
Основная волна 2018

Дата	Сумма долга
15	900
1	$900 \cdot в$
7	$\Rightarrow$ б.в. $900в - 830$
15	$900 - 1x = 830$
1	$830в$
7	$\Rightarrow$ б.в. $830в - 760$
15	$900 - 2 \cdot x = 760$
1	$760 \cdot в$
7	$\Rightarrow$ б.в. $760в - 690$
15	$900 - 3 \cdot x = 690$
...	
15	$900 - 9 \cdot x = 270$
1	$270 \cdot в$
7	$\Rightarrow$ б.в. $270в - 200$
15	$900 - 10 \cdot x = 200$
1	$200 \cdot в$
7	$\Rightarrow$ б.в. $200в$
15	0

$700 = 10 \cdot x$

$x = 70$

О.С.В. $= 1021$ тыс.

первые 10 выплат + 11 выплата $= 1021$ тыс

$\frac{900в - 830 + 270в - 200}{2} \cdot 10 + 200в = 1021$

$(585в - 515) \cdot 10 + 200в = 1021$

$5850в - 5150 + 200в = 1021$

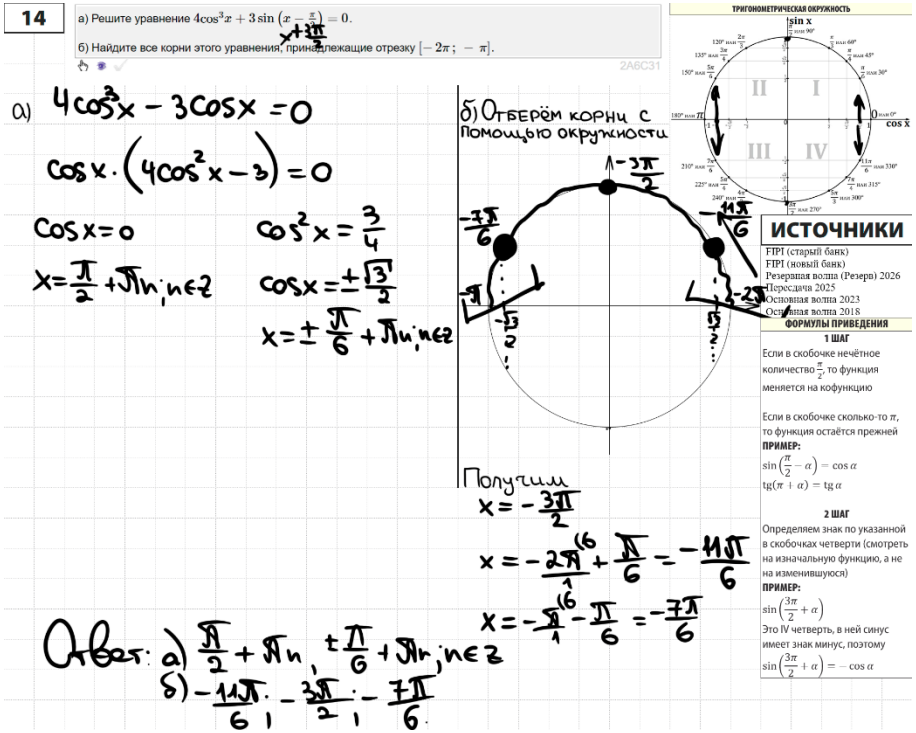
$6050 \cdot в = 6171$

$в = 1{,}02$

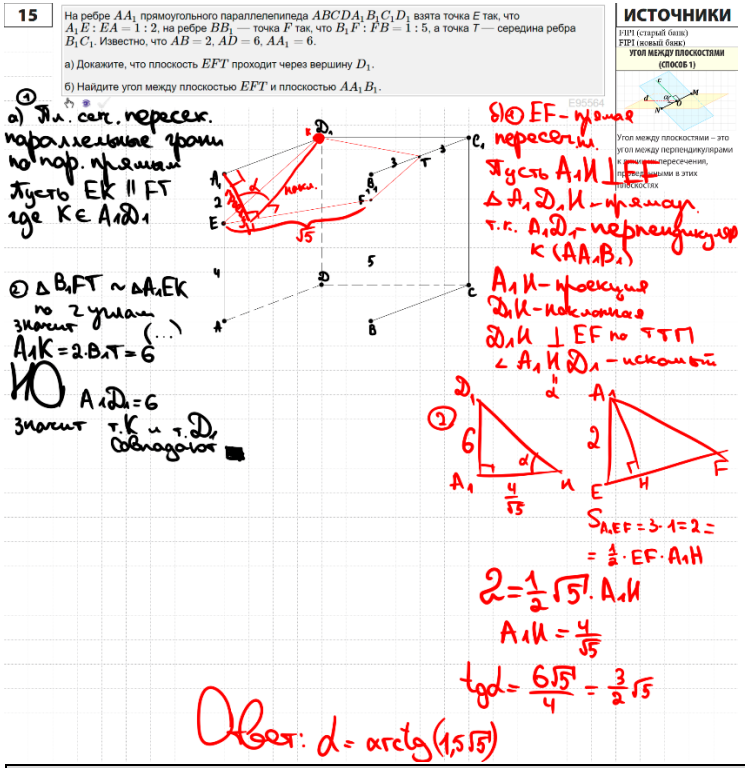
$1 + \frac{r}{100} = 1 + \frac{2}{100}$

$r = 2$

Ответ: 2.



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, но при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

16 Решите неравенство $\frac{8^{x+1}-40}{2\cdot 64^x-32}\le 1$.

ИСТОЧНИКИ
ГПП (новый банк)
Основная волна 2024
Основная волна 2017

$\frac{8^x\cdot 8^1-40}{2\cdot 64^x-32}-\frac{1}{1}\le 0$

Пусть $8^x=t$

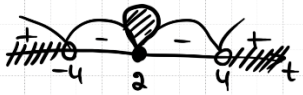
$\frac{8t-40}{2t^2-32}-\frac{1}{1}\le 0$

$\frac{8t-40-2t^2+32}{2\cdot(t^2-16)}\le 0$

$\frac{-2t^2+8t-8}{2\cdot(t^2-16)}\le 0 \quad |\cdot(-1)$

$\frac{t^2-4t+4}{(t-4)(t+4)}\ge 0$

$\frac{(t-2)^2}{(t-4)(t+4)}\ge 0$



$\left[\begin{array}{l} t<-4 \\ t=2 \\ t>4 \end{array}\right.$

$8^x<-4$
нет реш.

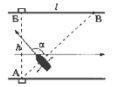
$8^x=2$
$(2^3)^x=2^1$
$2^{3x}=2^1$
$3x=1$
$x=\frac{1}{3}$

$8^x>4$
$2^{3x}>2^2$
$3x>2$
$x>\frac{2}{3}$

Ответ: $\{\frac{1}{3}\}\cup(\frac{2}{3};+\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

17 На противоположных берегах прямого участка реки друг напротив друга на расстоянии h расположены пристани А и Б (см. рисунок). Путник переправляется на лодке от пристани А на противоположный берег. Зная, что собственная скорость лодки v меньше скорости течения реки u (лодку будет сносить течением), путник направляет лодку под углом α к направлению течения.



В итоге лодку сносит течением, и путник прибывает к противоположному берегу реки в точку В, находящуюся от пристани Б на расстоянии l, которое выражается формулой

$$l=h\cdot\frac{u+v\cos\alpha}{v\sin\alpha}.$$

Найдите наименьшее возможное расстояние l, если $h=60$ м, $u=1{,}3$ м/с и $v=1{,}2$ м/с.

Исследуем ф-цию $f(\alpha)=\frac{u+v\cdot\cos\alpha}{v\cdot\sin\alpha}$ на наим. знач. при $0<\alpha<\pi$

$f'(\alpha)=\frac{-v\cdot\sin\alpha\cdot v\cdot\sin\alpha-(u+v\cdot\cos\alpha)\cdot v\cdot\cos\alpha}{v^2\cdot\sin^2\alpha}=$

$=\frac{-v^2\cdot\sin^2\alpha-u\cdot v\cdot\cos\alpha-v^2\cdot\cos^2\alpha}{v^2\cdot\sin^2\alpha}=$

$=\frac{-v^2\cdot(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)-u\cdot v\cdot\cos\alpha}{v^2\cdot\sin^2\alpha}=$

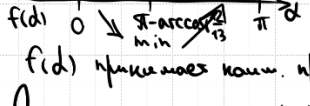
$=\frac{-v\cdot(v+u\cdot\cos\alpha)}{v^2\cdot\sin^2\alpha}$

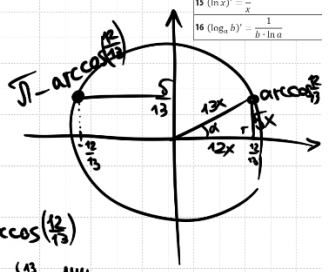
$f'(\alpha)=0$

$v+u\cdot\cos\alpha=0$

$\cos\alpha=-\frac{v}{u}=\frac{-1{,}2}{1{,}3}=-\frac{12}{13}$

$\alpha=\pi-\arccos(\frac{12}{13})$





ПРОИЗВОДНЫЕ

1	$C'=0$
2	$x'=1$
3	$(Cx)'=C$
4	$(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$
5	$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
6	$(U\cdot V)'=U'V+UV'$
7	$\left(\frac{U}{V}\right)'=\frac{U'V-UV'}{V^2}$
8	$(U(V))'=(U(V))'\cdot V'$
9	$(\sin x)'=\cos x$
10	$(\cos x)'=-\sin x$
11	$(\mathrm{tg}\,x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$
12	$(\mathrm{ctg}\,x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$
13	$(e^x)'=e^x$
14	$(a^x)'=a^x\cdot\ln a$
15	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$
16	$(\log_a b)'=\frac{1}{b\cdot\ln a}$

$f(\alpha)$ принимает наим. при $\alpha=\pi-\arccos(\frac{12}{13})$

$l_{наим}=60\cdot\frac{1{,}3+1{,}2\cdot(-\frac{12}{13})}{1{,}2\cdot\frac{5}{13}}=60\cdot\frac{\frac{13}{10}-\frac{144}{130}}{\frac{6}{13}}=60\cdot\frac{25\cdot 13}{130\cdot 6}=$

$=25$ м.

Ответ: 25 м.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

18 Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Диагонали AD и BE пересекаются в точке M. Известно, что $BCDM$ — параллелограмм.

а) Докажите, что две стороны пятиугольника равны.

б) Найдите AB, если известно, что $BE = 12$, $BC = 5$, $AD = 9$.

ИСТОЧНИКИ

ЕГЭ (новый банк)
Основная волна 2024

СВОЙСТВО ХОРД



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, но при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

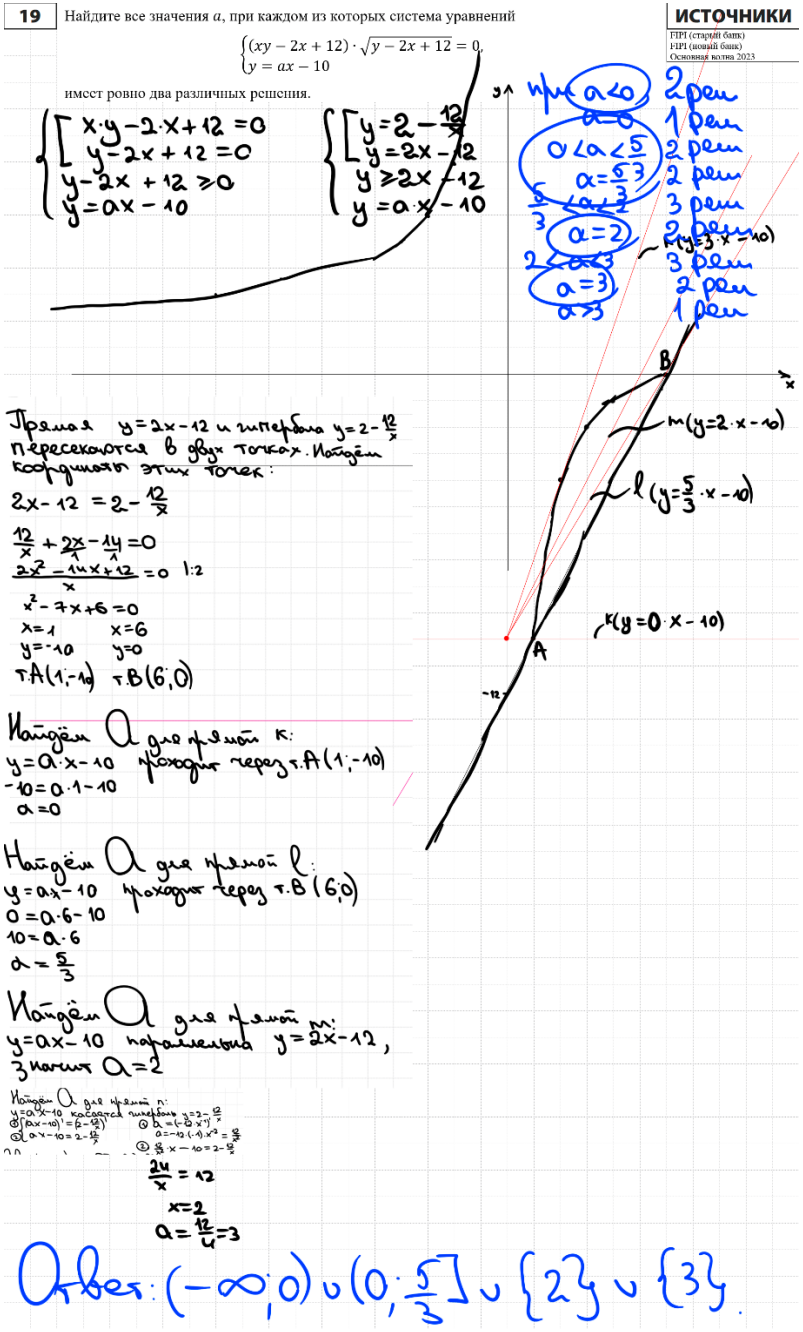
19 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(xy-2x+12)\cdot\sqrt{y-2x+12}=0,\\ y=ax-10\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Основная волна 2023



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

20

Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 10 раз больше, либо в 10 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3024.

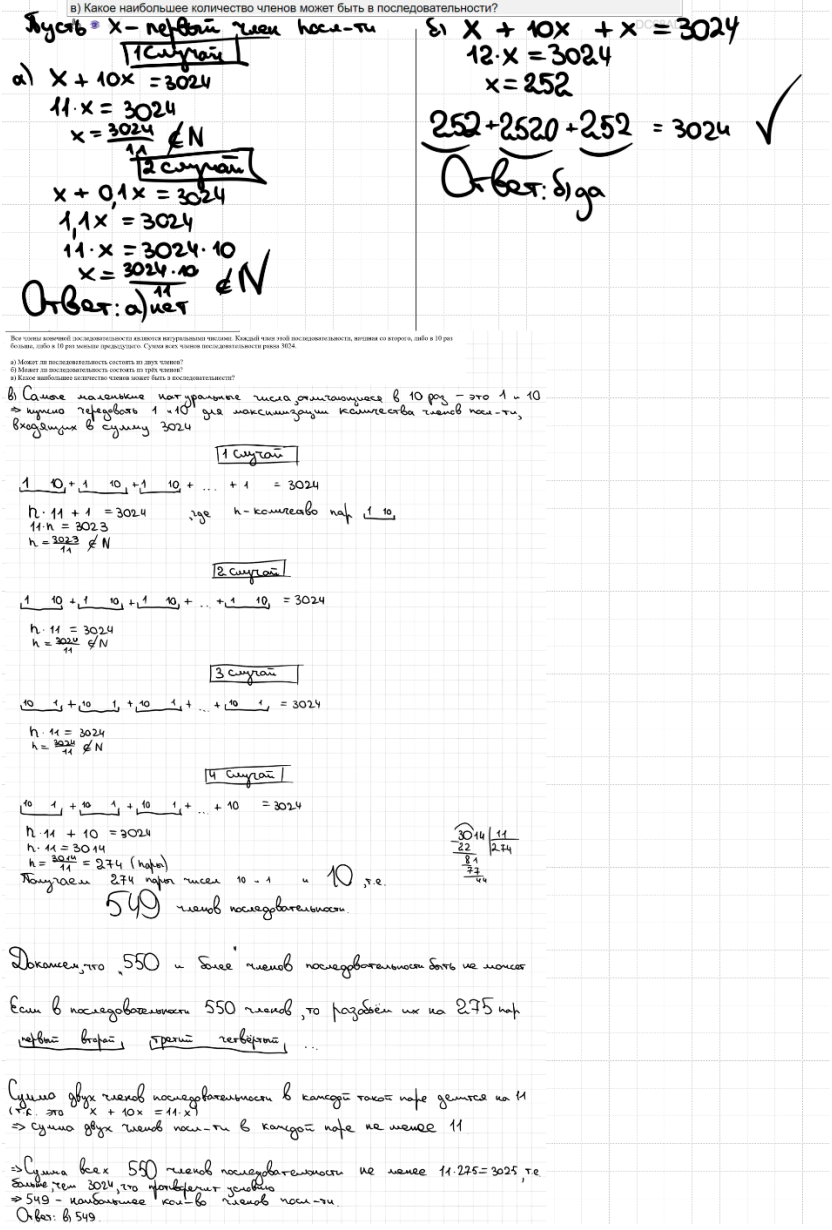
а) Может ли последовательность состоять из двух членов?

б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?

в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

ИСТОЧНИКИ

ГИА (старый банк)



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4